

Podstawy robotyki

Wykład VIb

Dynamika manipulatora c.d.

Janusz Jakubiak

Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska



Macierz pseudoinercji

J_k^k – macierz pseudoinercji przegubu k wyrażona w układzie k

$$J = J_k^k = \int_{m_k} \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz & x \\ xy & y^2 & yz & y \\ xz & yz & z^2 & z \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix} dm$$

Uwagi:

- ▶ J jest symetryczna
- ▶ element J_{44} jest równy masie ogniwa k
- ▶ 3 pierwsze elementy 4 kolumny (i wiersza) opisują położenie środka masy ogniwa k (przemnożone przez masę ogniwa)
- ▶ elementy w lewej górnej macierzy 3×3 stanowią tensor momentu bezwładności $\hat{I}$



Macierz pseudoinercji – tensor momentu bezwładności

- ▶ Elementy J_{11} , J_{22} , J_{33} są momentami bezwładności ogniw względem płaszczyzn, odpowiednio – YZ , XZ , XY .
M.b. względem płaszczyzn są związane z m.b. względem osi zależnościami

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{2} (I_Y + I_Z - I_X) & I_X &= J_{22} + J_{33} \\ J_{22} &= \frac{1}{2} (I_X + I_Z - I_Y) & I_Y &= J_{11} + J_{33} \\ J_{33} &= \frac{1}{2} (I_X + I_Y - I_Z) & I_Z &= J_{11} + J_{22} \end{aligned}$$

- ▶ Elementy $J_{12} = D_{XY}$, $J_{13} = D_{XZ}$, $J_{23} = D_{YZ}$ są nazywane momentami dewiacyjnymi (inaczej: mieszanymi, odśrodkowymi)¹

¹jeśli płaszczyzna XY jest płaszczyzną symetrii ogniwa, to momenty
 $D_{XZ} = D_{YZ} = 0$



Obliczanie równania dynamiki

$$D_{ij} = \text{tr} \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_0^k}{\partial q_i} J_k^k \left(\frac{\partial A_0^k}{\partial q_j} \right)^T$$

$$G_i = - \sum_{k=1}^n m_k \left\langle \bar{g}, \frac{\partial A_0^k}{\partial q_i} \bar{r}_k \right\rangle,$$

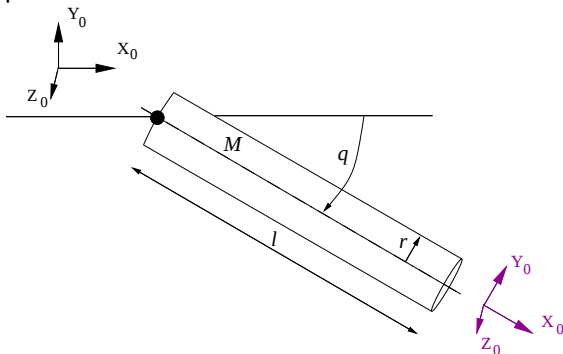
gdzie $\bar{g} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\bar{r}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ 0 \end{bmatrix}$, r_k – położenie środka masy ogniwa k

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{kj}^i \dot{q}_k, \quad C_{kj}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i} \right)$$



Przykład

Wyznaczanie dynamiki dla pojedynczego wahadła przy założeniu, że ogniwo jest jednorodnym walcem o masie M , długości l i promieniu r .



Środek masy w układzie XYZ : $r = [-\frac{l}{2} \ 0 \ 0]^T$.



Kinematyka manipulatora $K(q) = Rot(Z, q) Trans(X, l)$

$$K(q) = A_0^1(q) = \begin{bmatrix} c_q & -s_q & 0 & lc_q \\ s_q & c_q & 0 & ls_q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pochodna po $q_1 = q$

$$\frac{\partial A_0^1(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} -s_q & -c_q & 0 & -ls_q \\ c_q & -s_q & 0 & lc_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Momenty bezwładności walca względem osi przechodzących przez środek masy

$$I_{x0} = \frac{1}{2}Mr^2 \quad I_{y0} = I_{z0} = \frac{1}{12}M(3r^2 + l^2).$$

Następnie należy wyznaczyć momenty bezwładności w początku układu XYZ , przesuniętego względem środka masy o $\frac{l}{2}$.

Tw. Steinera

$$I = I_0 + Md^2$$

gdzie I_0 jest momentem bezwładności osi równoległej przechodzącej przez środek masy, a d – odległością między osiami



Przykład – c.d. 3

Otrzymujemy

$$I_{x0} = \frac{1}{2}Mr^2 \quad I_{y0} = I_{z0} = \frac{1}{12}M(3r^2 + 4l^2),$$

stąd

$$J_{11} = \frac{1}{3}Ml^2 \quad J_{22} = J_{33} = \frac{1}{4}Mr^2.$$

Ponieważ walec jest symetryczny zarówno względem płaszczyzny XY , jak i XZ , momenty dewiacyjne $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Ml^2 & 0 & 0 & -M\frac{l}{2} \\ 0 & \frac{1}{4}Mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}Mr^2 & 0 \\ -M\frac{l}{2} & 0 & 0 & M \end{bmatrix}$$



Przykład – Tensor bezwładności z def.

Przy założeniu, że walec jest jednorodny, gęstość masy wynosi

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{l\pi r^2}.$$

Elementy macierzy pseudoinercji można obliczyć ze wzoru

$$\int_M f(m) dm = \rho \int_{-l}^0 \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$$



Mathematica 6.0 for Linux x86 (32-bit)
Copyright 1988-2007 Wolfram Research, Inc.

In[1]:= rho=M/(Pi*l*r^2)

Out[1]=
$$\frac{M}{l \pi r^2}$$

In[2]:= Simplify[rho*Integrate[z^2,{z,-l,0},{y,-r,r},{x,-Sqrt[r^2-y^2],Sqrt[r^2-y^2]}]]

Out[2]=
$$\frac{l^2 M \sqrt{r^2} \sqrt{r^2}}{3}$$

In[3]:= Simplify[rho*Integrate[x*z,{z,-l,0},{y,-r,r},{x,-Sqrt[r^2-y^2],Sqrt[r^2-y^2]}]]

Out[3]= 0

In[4]:= Simplify[rho*Integrate[x*y,{z,-l,0},{y,-r,r},{x,-Sqrt[r^2-y^2],Sqrt[r^2-y^2]}]]

Out[4]= 0

In[5]:=



Obliczanie macierzy inercji dynamiki

$$\begin{aligned}
 D(q) = D_{11}(q) &= \text{tr} \frac{\partial A_0^1}{\partial q} J \left(\frac{\partial A_0^1}{\partial q} \right)^T = \text{tr} \begin{bmatrix} -s_q & -c_q & 0 & -ls_q \\ c_q & -s_q & 0 & lc_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} M l^2 & 0 & 0 & -M \frac{l}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} M r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} M r^2 & 0 \\ -M \frac{l}{2} & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_q & c_q & 0 & 0 \\ -c_q & -s_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ls_q & lc_q & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \text{tr} \begin{bmatrix} (j_{11} + 2lj_{14} + Ml^2) s_q^2 + j_{22} c^2 & \star & 0 & 0 \\ \star & (j_{11} + 2lj_{14} + Ml^2) c_q^2 + j_{22} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{3} M l^2 + \frac{1}{4} M r^2
 \end{aligned}$$

¹★ – elementy nieistotne dla dalszych obliczeń

Obliczanie $G(q)$ i $C(q, \dot{q})$

Ponieważ D nie zależy od q ,

$$C(q, \dot{q}) = 0$$

Człon grawitacyjny

$$\begin{aligned} G(q) &= -M\bar{g}^T \frac{\partial A_0^k}{\partial q_i} \bar{r}_k = \\ &= -M \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_q & -c_q & 0 & -l s_q \\ c_q & -s_q & 0 & l c_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= -M \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} l s_q & -\frac{1}{2} l c_q & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^T \\ &= -\frac{1}{2} M l g c_q \end{aligned}$$

