# Podstawy robotyki

Wykład VI

# Dynamika manipulatora

**Robert Muszyński** **Janusz Jakubiak**
Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska

# Dynamika manipulatora

Dynamika opisuje sposób zachowania się manipulatora poddanego wymuszeniu w postaci momentów/sił napędowych

- Proste zadanie dynamiki, $\tau \longrightarrow q$
- Odwrotne zadanie dynamiki, $q \longrightarrow \tau$

$$\boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,}$$

Formalizmy do wyprowadzania równań dynamiki:

1. Newtona-Eulera
2. Eulera-Lagrange'a
3. Kane'a

# Porównanie formalizmów wyprowadzania równań dynamiki

Eulera-Lagrange'a:

- systematyczny,
- wyprowadzone równania ruchu są w zwartej, analitycznej formie, wygodnej przy projektowaniu układu sterowania
- umożliwia efektywne dodanie złożonych efektów mechanicznych, takich jak elastyczności przegubów/ramion

Newtona-Eulera:

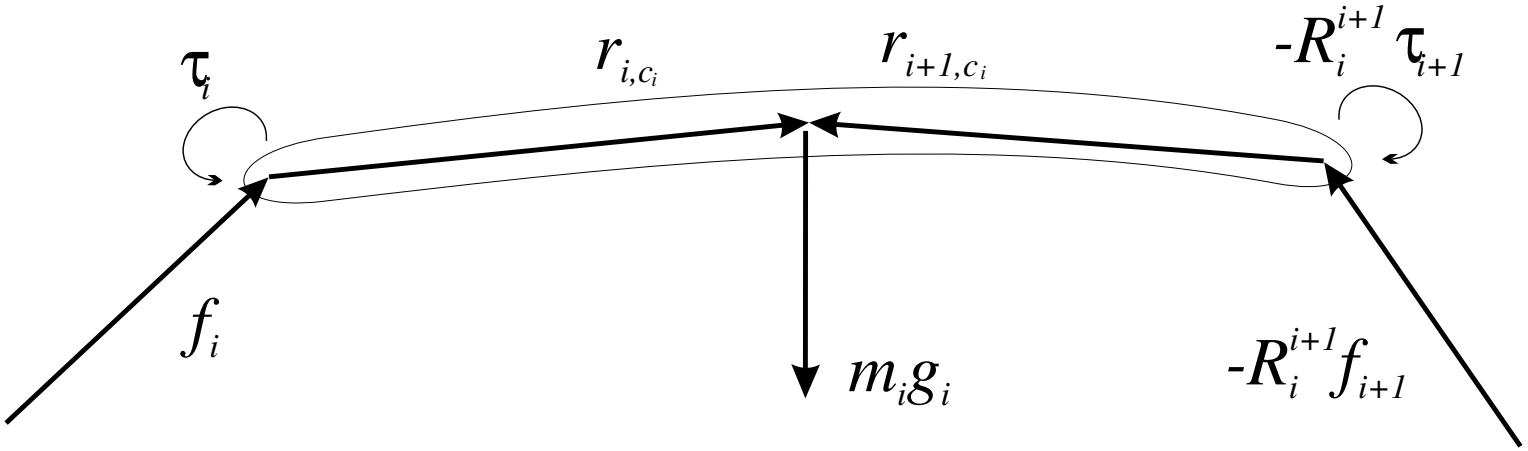
- ze swej natury rekurencyjny, efektywny obliczeniowo

# Założenia metody Newtona-Eulera

Prawa mechaniki newtonowskiej wykorzystywane w formaliźmie Newtona–Eulera:

1. każda akcja wywołuje reakcję;
2. prędkość zmian pędu ciała jest równa sumie sił przyłożonych do niego;
3. prędkość zmian popędu ciała jest równa sumie momentów sił przyłożonych do niego.

# Założenia metody Newtona-Eulera – ilustracja




$m_i$ – masa $i$-tego ogniwa;

$r_{i,c_j}$ – wektor z przegubu $i$-tego do śr. masy ogniwa $j$-tego;

$r_{i,i+1}$ – wektor z przegubu $i$-tego do $i+1$-ego;

$f_i$ – siła wywierana przez ogniwo $i-1$ na ogniwo $i$-te;

$\tau_i$ – moment wywierany przez ogn. $i-1$ na ogn. $i$-te;

$g_i$ – przyspieszenie ziemskie wyrażone w $i$-tym układzie.

# Założenia metody Newtona-Eulera – siły

prędkość zmian pędu ciała jest równa sumie sił przyłożonych do niego

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = f, \tag{1}$$

$m$ – masa ciała,
$v$ – prędkość środka masy,
$f$ – wypadkowa sił zewnętrznych.

U nas $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$ stąd

$$ma = f,$$

$a = \dot{v}$ – przyspieszenie środka masy ciała.

# Założenia metody Newtona-Eulera – momenty sił

prędkość zmian popędu ciała jest równa sumie momentów sił przyłożonych do niego

$$\frac{\mathrm{d}(I_0\omega_0)}{\mathrm{d}t} = \tau_0, \tag{2}$$

$I_0$ – moment bezwładności ciała wyrażony w inercyjnym układzie odniesienia,
$\omega_0$ – prędkość kątowa ciała,
$\tau_0$ – wypadkowy moment przyłożony do ciała.

Równanie (2) w lokalnym układzie współrzędnych ma postać[1]:

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = \tau.$$

[1] przy $I = \text{const}$

# Założenia metody Newtona-Eulera – prawo równowagi

Równanie równowagi sił:

$$f_i - R_i^{i+1} f_{i+1} + m_i g_i = m_i a_{c,i},$$

gdzie $a_{c,i}$ – przyspieszenie środka masy $i$-tego ogniwa wyrażone w układzie inercyjnym.
Równanie równowagi momentów:

$$\tau_i - R_i^{i+1} \tau_{i+1} + f_i \times r_{i,c_i} + \\ - (R_i^{i+1} f_{i+1}) \times r_{i+1,c_i} = I_i \alpha_i + \omega_i \times (I_i \omega_i),$$

gdzie $I_i$ – macierz inercji ogniwa $i$-tego wyrażona w ukł. współ. równoległym do ukł. $i$-tego o środku umieszczonym w środku masy ogniwa $i$-tego, $\alpha_i$ – przyspieszenie kątowe ogniwa $i$-tego wyrażone w układzie inercyjnym.

# Idea metody Newtona–Eulera

**Idea metody Newtona–Eulera:** dla danych współrzędnych uogólnionych i ich pochodnych $q$, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ określić wektory sił $f_1, f_2, \ldots, f_n$ i momentów $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ w następujący sposób:

- dla danych $q$, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ określić wszystkie prędkości i przyspieszenia występujące w układzie;
- mając wszystkie prędkości i przyspieszenia wyznaczyć siły i momenty występujące w układzie.

# Metoda Newtona–Eulera dla przegubów rotacyjnych

W celu wykorzystania metody Newtona–Eulera należy:

- zakładając

$$\omega_0 = 0, \alpha_0 = 0, a_{c,0} = 0, a_{e,0} = 0,$$

$a_{e,i}$ – przyspieszenie końca $i$-tego ogniwa, wyliczyć równania:

$$\begin{aligned}
\omega_i &= (R_{i-1}^i)^T \omega_{i-1} + b_i \dot{q}_i, \qquad b_i = (R_0^i)^T z_{i-1}, \\
\alpha_i &= (R_{i-1}^i)^T \alpha_{i-1} + b_i \ddot{q}_i + \omega_i \times b_i \dot{q}_i, \\
a_{e,i} &= (R_{i-1}^i)^T a_{e,i-1} + \dot{\omega}_i \times r_{i,i+1} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,i+1}), \\
a_{c,i} &= (R_{i-1}^i)^T a_{e,i-1} + \dot{\omega}_i \times r_{i,c_i} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,c_i}),
\end{aligned}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

# Metoda Newtona–Eulera

- zakładając

$$f_{n+1} = 0, \ \tau_{n+1} = 0$$

wyliczyć równania

$$\begin{aligned} f_i &= R_i^{i+1} f_{i+1} - m_i g_i + m_i a_{c,i}, \\ \tau_i &= R_i^{i+1} \tau_{i+1} - f_i \times r_{i,c_i} + \\ &\qquad + (R_i^{i+1} f_{i+1}) \times r_{i+1,c_i} + I_i \alpha_i + \omega_i \times (I_i \omega_i), \end{aligned}$$

dla $i = n, n-1, \ldots, 1$.

# Metoda Newtona–Eulera

Otrzymane równania są postaci:

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik}(q)\ddot{q}_k + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}^{i}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k + g_i(q) = \tau_i,$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Definiując

$$c_{ij}(q, \dot{q}) \triangleq \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{i}\dot{q}_k,$$

otrzymujemy wektorowe równanie dynamiki:

$$\boxed{D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,}$$

# Model dynamiki

$$\boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,}$$

$D(q)$ – macierz inercji (symetryczna i dodatniookreślona);

$C(q,\dot{q})$ – macierz sił Coriolisa i odśrodkowych;

$G(q)$ – wektor sił związanych z siłami grawitacji;

$\tau$ – wektor sił i momentów niepotencjalnych działających na układ (tarcia, opory ruchu, więzy, sterowania).

Własności modelu dynamiki

- $D(q)$ – macierz symetryczna i dodatniookreślona;
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D(q(t)) = C(q(t),\dot{q}(t)) + C^T(q(t),\dot{q}(t))$

# Formalizm Eulera-Lagrange'a

Zgodnie z zasadą najmniejszego działania dla układu o współrzędnych uogólnionych $q$ i prędkościach uogólnionych $\dot{q}$

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) \mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \min,$$

gdzie $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ – lagranżian układu.
$K(q, \dot{q})$ – energia kinetyczna układu
$V(q)$ – energia potencjalna.

# Formalizm Eulera-Lagrange'a

Warunkiem koniecznym minimum działania jest spełnienie równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_i} = u_i(t), \tag{3}$$

dla $i = 1, \ldots, n$, gdzie $u_i$ – wszystkie momenty i siły zewnętrzne typu niepotencjalnego.