

Podstawy robotyki

Wykład V

Jakobian manipulatora i osobliwości

Robert Muszyński Janusz Jakubiak

Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska



Metoda bezpośrednia uzyskania macierzy Jacobiego

Jeśli kinematyka manipulatora dana jest równaniem:

$$y = k(q), \quad y \in \mathbb{Y}, \quad q \in \mathbb{Q},$$

wtedy po zróżniczkowaniu względem czasu otrzymujemy

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\dot{q}$$

- ▶ wyznaczyć kinematykę manipulatora $k(q)$,
- ▶ wybrać współrzędne,
- ▶ wyrazić kinematykę w wybranych współrzędnych,
- ▶ formalnie zróżniczkować kinematykę $k \rightarrow \frac{\partial k}{\partial q}$.



Metoda pośrednia uzyskania macierzy Jacobiego

Dla kinematyki danej w postaci

$$T_0^n = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

szukamy zależności prędkości liniowej i kątowej efektora od prędkości w poszczególnych przegubach w postaci

$$\dot{y} = J\dot{q},$$

gdzie J – jacobian manipulatora.

Szukamy jacobianu

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \quad \begin{cases} v_0^n = J_v \dot{q} \\ \omega_0^n = J_\omega \dot{q} \end{cases}$$



Metoda pośrednia uzyskania macierzy Jacobiego

- ▶ Prędkość liniowa

$$v_0^n = \dot{d}_0^n$$

- ▶ Prędkość kątowna

$$R_0^n (R_0^n)^T = I$$
$$\frac{dR_0^n}{dq} (R_0^n)^T + R_0^n \frac{d(R_0^n)^T}{dq} = 0$$

Zdefiniujmy

$$S \triangleq \frac{dR_0^n}{dq} (R_0^n)^T.$$

Wówczas

$$S^T = \left(\frac{dR_0^n}{dq} (R_0^n)^T \right)^T = R_0^n \frac{d(R_0^n)^T}{dq}.$$



Metoda pośrednia... – prędkość kątowa

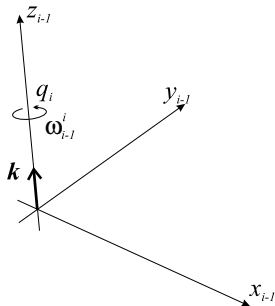
$$S \triangleq \frac{dR_0^n}{dq} (R_0^n)^T$$
$$S^T = R_0^n \frac{d(R_0^n)^T}{dq}$$

Mamy więc

$$\boxed{S + S^T = 0}$$
$$S(\omega_0^n) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_0^n = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$
$$S(\omega_0^n)p = \omega_0^n \times p$$



Metoda pośrednia... – prędkość kątowna



- ▶ przegub rotacyjny

$$\omega_{i-1}^i = \dot{q}_i k, \quad k = [0, 0, 1]^T$$

- ▶ przegub translacyjny

$$\omega_{i-1}^i = 0$$



Metoda pośrednia... – prędkość kątowa

Można pokazać, że

$$\omega_0^n = \omega_0^1 + R_0^1 \omega_1^2 + \dots + R_0^{n-1} \omega_{n-1}^n.$$

W naszym przypadku

$$\omega_0^n = \rho_1 \dot{q}_1 k + \rho_2 \dot{q}_2 R_0^1 k + \dots + \rho_n \dot{q}_n R_0^{n-1} k = \sum_{i=1}^n \rho_i \dot{q}_i z_{i-1},$$

gdzie $z_{i-1} = R_0^{i-1} k$ – trzecia kolumna macierzy R_0^{i-1} ,

$$\rho_i = \begin{cases} 0 & \text{– przegub translacyjny} \\ 1 & \text{– przegub rotacyjny} \end{cases}.$$



Metoda pośrednia... – prędkość liniowa

Wyliczając różniczkę zupełną $\dot{d}_0^n$ otrzymujemy

$$\dot{d}_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Zatem w j -tej kolumnie macierzy J_v znajduje się wektor $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i}$.
Przypomnijmy

$$\begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Rot(z_{i-1}, \theta_i) Trans(z_{i-1}, d_i)$$

$$Trans(x_{i-1}, a_i) Rot(x_{i-1}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Stąd

$$d_{i-1}^i = d_i k + a_i R_{i-1}^i i = q_i k + a_i R_{i-1}^i i.$$

Przy poruszonym tylko i -tym przegubie

$$\dot{d}_0^n = R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^i = \dot{q}_i R_0^{i-1} k = \dot{q}_i z_{i-1}.$$

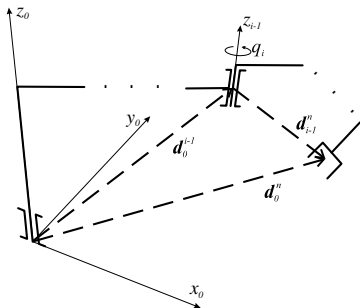
A zatem

$$\boxed{\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1}}$$



Metoda pośrednia... – prędkość liniowa

► przegub rotacyjny



$$d_0^n = d_0^{i-1} + R_0^{i-1} d_{i-1}^n$$

Ponieważ d_0^{i-1} , R_0^{i-1} niezależna od q_i

$$\dot{d}_0^n = R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^n.$$

Prędkość liniowa powodowana ruchem q_i

$$\dot{d}_{i-1}^n = \dot{q}_i k \times d_{i-1}^n.$$



Stąd

$$\begin{aligned}\dot{d}_0^n &= R_0^{i-1}(\dot{q}_i k \times d_{i-1}^n) = \\ &\quad \dot{q}_i R_0^{i-1} k \times R_0^{i-1} d_{i-1}^n = \\ &\quad \dot{q}_i z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1}).\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\boxed{\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1})}$$



Metoda pośrednia... – podsumowanie

Podsumowując jacobian dany jest w postaci

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_n \end{bmatrix}$$

gdzie i -ta kolumna

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

dla przegubu rotacyjnego lub

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dla przegubu translacyjnego.



Związek pomiędzy jacobianem a macierzą Jacobiego

Po wybraniu współrzędnych w przestrzeni zewnętrznej jako współrzędne kartezjańskie + kąty orientacji dostajemy

$$J(q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(y) \end{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q}(q)$$

gdzie $M(y) = \begin{bmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) \end{bmatrix}$,

$m_i(y)$ – wektory jednostkowe osi obrotu wokół których mierzone są kąty orientacji.

Np. dla kątów Eulera

$$M(y) = \begin{bmatrix} -\cos \phi \operatorname{ctg} \theta & -\sin \phi \operatorname{ctg} \theta & 1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \frac{\cos \phi}{\sin \theta} & \frac{\sin \phi}{\sin \theta} & 0 \end{bmatrix}$$

określone dla $0 < \theta < \pi$.



Mamy dane

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q} \dot{q}, \quad y(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (1)$$

Szukamy $q(t)$ dla $t \in [t_0, t_k]$. W tym celu wyliczamy $y(t_0)$ i przy użyciu algorytmu Newtona znajdujemy $q(t_0)$. Następnie rozwiązujemy równanie różniczkowe

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial k}{\partial q} \right)^{-1} \dot{y} \quad (2)$$

z warunkiem początkowym $q(t_0)$.



Metoda jacobianowa – Inwers uogólniony

Równania (1) są postaci

$$y_{(m \times 1)} = A_{(m \times n)} q_{(n \times 1)}.$$

Przy danym y szukamy q , gdy $m \leq n$, $\text{rank} A = m$.

Będziemy szukali rozwiązania szczegółowego minimalizującego energię

$$H(q) = \frac{1}{2} \langle q, q \rangle$$

przy ograniczeniach $y = Aq$. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(q) = \frac{1}{2} \langle q, q \rangle + \lambda^T (y - Aq) = \frac{1}{2} \langle q, q \rangle + \langle \lambda, y - Aq \rangle.$$

Z warunków na minimum mamy

$$\frac{\partial L}{\partial q} = q^T - \lambda^T A = 0 \quad \Rightarrow \quad q = A^T \lambda.$$



Metoda jacobianowa – inwers uogólniony

Stąd

$$y = AA^T \lambda$$

co prowadzi do

$$\lambda = (AA^T)^{-1} y. \quad (3)$$

Wstawiając (3) do wyniku minimalizacji dostajemy

$$q = A^T (AA^T)^{-1} y = A^+ y.$$

Macierz

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$$

nazywa się pseudoinwersem Moore'a–Penrose'a.



Metoda jacobianowa – inwers uogólniony

Równania $y = Aq$ będą spełnione, jeżeli do rozwiązania szczegółowego $q = A^+y$ dodamy element z taki, że $Az = 0$, co oznacza, że

$$z \in \text{Ker}A.$$

Stąd rozwiązanie ogólne

$$q = A^+y + z, \quad z \in \text{Ker}A,$$

lub przy

$$z = (I - A^+A)\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}^n$$

ostatecznie

$$q = A^+y + (I - A^+A)\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}^n.$$



Metoda jacobianowa – inwers uogólniony

Sprawdźmy

$$y = Aq = AA^+y + (A - \underbrace{AA^+A}_A)\omega = Iy + 0 = y.$$

Skoro ω dowolne, dobierzmy je tak by optymalizować np. manipulowalność

$$\omega = \underset{q}{\text{grad}} \left(-\sqrt{\det(AA^T)} \right).$$



Metoda jacobianowa rozwiązania OZK. Podsumowanie.

Przy równaniu

$$y = k(q), \quad y \in \mathbb{Y}, \quad q \in \mathbb{Q}, \quad (4)$$

$\dim \mathbb{Y} = m$, $\dim \mathbb{Q} = n$, i danym $y_d(t)$ dla $t \in [t_0, t_k]$ (lub y_d) znaleźć $q(t)$ (lub q) takie, że (4) spełnione dla $y_d(t)$ (lub y_d).



Metoda jacobianowa rozwiązania OZK. Podsumowanie.

- ▶ gdy $n = m$ i macierz Jacobiego nieosobliwa:

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) \right)^{-1} \dot{y}(t), \quad k(q(t_0)) = y(t_0),$$

- ▶ gdy $n \geq m$ i $\text{rank} \frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) = m$:

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) \right)^+ \dot{y}(t), \quad k(q(t_0)) = y(t_0),$$

lub ogólniej

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) \right)^+ \dot{y}(t) + \left(I - \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) \right)^+ \frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) \right) \omega(t).$$



Metoda jacobianowa rozwiązania OZK. Podsumowanie.

Metoda Newtona

- ▶ gdy $n = m$ i macierz Jacobiego nieosobliwa:

$$q_{k+1} = q_k + \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k) \right)^{-1} (y_d - k(q_k)),$$

- ▶ gdy $n \geq m$ i $\text{rank} \frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) = m$:

$$q_{k+1} = q_k + \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k) \right)^+ (y_d - k(q_k)),$$

$$\left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k) \right)^+ = \left(\frac{\partial k}{\partial q} \right)^T \left(\frac{\partial k}{\partial q} \left(\frac{\partial k}{\partial q} \right)^T \right)^{-1} (q_k)$$



Macierz Jacobiego kinematyki manipulatora $\frac{\partial k}{\partial q}(q)$ określa zależność

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\dot{q}, \quad y \in \mathbb{Y}, q \in \mathbb{Q}, \dim \mathbb{Y} = m, \dim \mathbb{Q} = n,$$

co można zapisać jako

$$dy = \frac{\partial k}{\partial q}(q)dq,$$

gdzie różniczki dy i dq określają kierunki w $\mathbb{Y}$ i $\mathbb{Q}$. Jeśli więc

$$\text{rank} \frac{\partial k}{\partial q}(q) < \min(n, m)$$

istnieją w $\mathbb{Y}$ kierunki, które nie mogą zostać wygenerowane przez jakiegokolwiek kierunki w $\mathbb{Q}$.



Definicje

Punktem regularnym kinematyki k nazywamy taką konfigurację $q \in \mathbb{Q}$, że

$$\text{rank} \frac{\partial k}{\partial q}(q) = \min(n, m).$$

Punktem osobliwym nazywamy takie $q \in \mathbb{Q}$, że

$$\text{rank} \frac{\partial k}{\partial q}(q) < \min(n, m).$$

Niech $q \in \mathbb{Q}$ będzie konfiguracją osobliwą. Wówczas

$$dy = \frac{\partial k}{\partial q}(q) dq,$$

oraz $\text{Ker} \frac{\partial k}{\partial q}(q) \neq 0$. Oznacza to, że $\exists dq \neq 0$ która daje zerową zmianę dy .



W otoczeniu osobliwości:

- ▶ ruch w pewnych kierunkach w $\mathbb{Y}$ jest nieosiągalny;
- ▶ pewne ruchy w $\mathbb{Q}$ nie powodują ruchu w $\mathbb{Y}$;
- ▶ ograniczone prędkości efektora mogą wymagać nieograniczonych prędkości w przegubach;
- ▶ może nie istnieć jednoznaczne rozwiązanie OZK;
- ▶ duże siły na efektorze mogą powodować niewielkie siły w przegubach.



Przy zależności

$$dy = \frac{\partial k}{\partial q}(q) dq,$$

wirtualna praca układu

$$dw = F^T dy - \tau^T dq,$$

gdzie F – wektor sił i momentów na chwytaku, τ – wektor momentów/sił w przegubach, wyraża się jako

$$dw = \left(F^T \frac{\partial k}{\partial q}(q) - \tau^T \right) dq,$$

co równe jest zeru jeśli manipulator pozostaje w równowadze. Stąd

$$\tau = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q) \right)^T F,$$

