

Podstawy robotyki

Wykład II

Ruch ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej

Robert Muszyński Janusz Jakubiak

Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska



- ▶ przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}, \mathbf{y} &\in \mathbb{R}^3, & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^3 x_i y_i \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, x_3]^T & \mathbf{y} &= [y_1, y_2, y_3]^T\end{aligned}$$

- ▶ iloczyn skalarny $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\langle \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \beta \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$



Preliminaria matematyczne 2

- norma (długość wektora) ($\|\cdot\|$)

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$



- ▶ norma (długość wektora) ($\|\cdot\|$)

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

- ▶ metryka euklidesowa (odległość) ($\rho(\cdot, \cdot)$)

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$



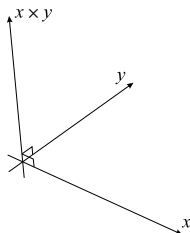
Preliminaria matematyczne 3

- ▶ iloczyn wektorowy ($\cdot \times \cdot$)

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + \\ &\quad (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}\end{aligned}$$

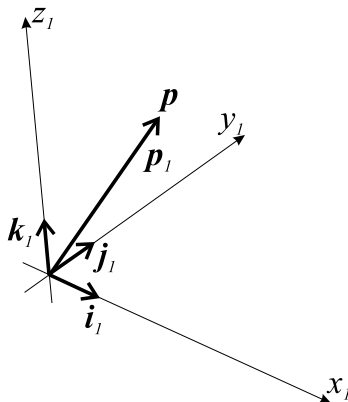


$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

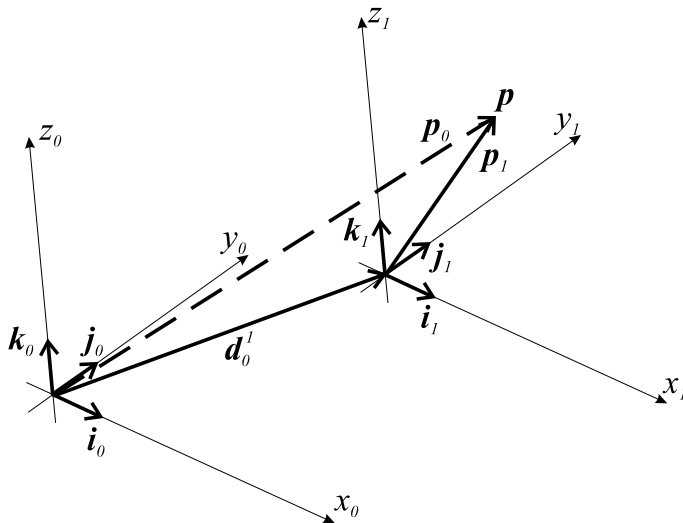


- ▶ translacja
- ▶ rotacja

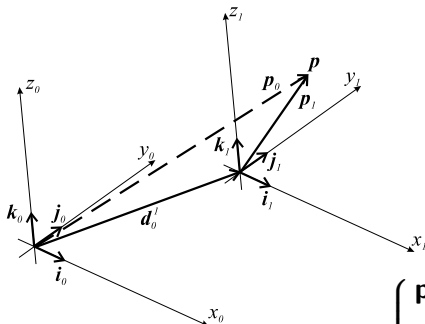
Elementarna translacja 1



Elementarna translacja 1



Elementarna translacja 2



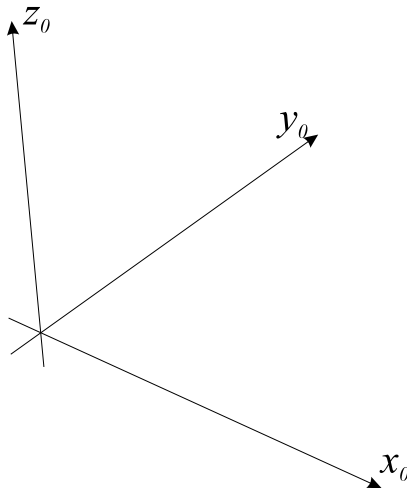
$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = p_{1x}\mathbf{i}_1 + p_{1y}\mathbf{j}_1 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{p}_0 = p_{0x}\mathbf{i}_0 + p_{0y}\mathbf{j}_0 + p_{0z}\mathbf{k}_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{d}_0^1 = d_{0x}^1\mathbf{i}_0 + d_{0y}^1\mathbf{j}_0 + d_{0z}^1\mathbf{k}_0$$

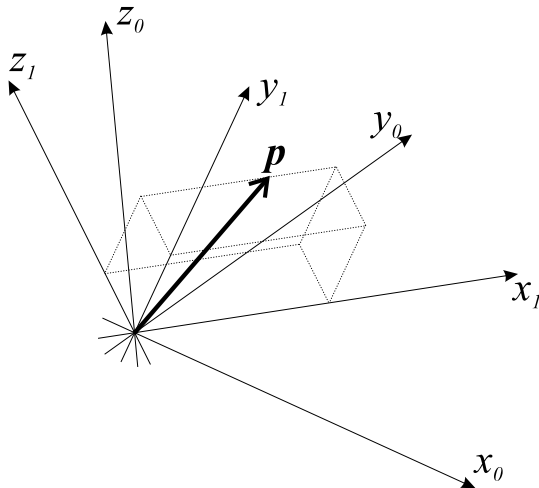
$$\boxed{\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1}$$



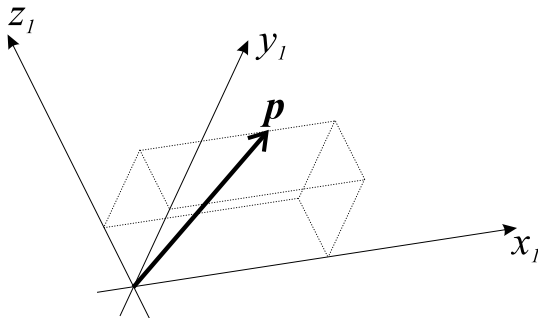
Elementarna rotacja 1



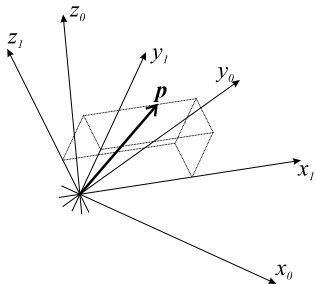
Elementarna rotacja 1



Elementarna rotacja 1



Elementarna rotacja 2



$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0 \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{i}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0 \mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{j}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0 \mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{k}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 \end{cases}$$



Elementarna rotacja 3

$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0 \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{i}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0 \mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{j}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0 \mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{k}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 \end{cases}$$



Elementarna rotacja 3

$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0 \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{i}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0 \mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{j}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0 \mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{k}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1$$



Elementarna rotacja 3

$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0 \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{i}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0 \mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{j}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0 \mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 \mathbf{k}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1$$

gdzie

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 \end{bmatrix}$$



Elementarna rotacja 4

Analogicznie

$$\begin{cases} p_{1x} = \mathbf{p}_1 \mathbf{i}_1 = \mathbf{p}_0 \mathbf{i}_1 = p_{0x} \mathbf{i}_0 \mathbf{i}_1 + p_{0y} \mathbf{j}_0 \mathbf{i}_1 + p_{0z} \mathbf{k}_0 \mathbf{i}_1 \\ p_{1y} = \mathbf{p}_1 \mathbf{j}_1 = \mathbf{p}_0 \mathbf{j}_1 = p_{0x} \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_1 + p_{0y} \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_1 + p_{0z} \mathbf{k}_0 \mathbf{j}_1 \\ p_{1z} = \mathbf{p}_1 \mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_0 \mathbf{k}_1 = p_{0x} \mathbf{i}_0 \mathbf{k}_1 + p_{0y} \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_1 + p_{0z} \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{p}_1 = R_1^0 \mathbf{p}_0$$

gdzie

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0 \mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$



Elementarna rotacja 5

Biorąc pod uwagę, że

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0 \mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$



Elementarna rotacja 5

Biorąc pod uwagę, że

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0 \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0 \mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0 \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$

mamy

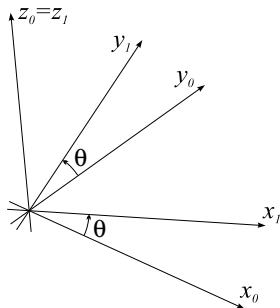
$$\boxed{R_1^0 = (R_0^1)^{-1} = (R_0^1)^T}$$

$$\det R_0^1 = \pm 1, \quad R_0^1 \in SO(3)$$



Rotacje wokół osi układu współrzędnych

► wokół osi Z



$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_0 = \cos \theta & \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_0 = -\sin \theta & \mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 = 0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_0 = \sin \theta & \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0 = \cos \theta & \mathbf{k}_1 \mathbf{j}_0 = 0 \\ \mathbf{i}_1 \mathbf{k}_0 = 0 & \mathbf{j}_1 \mathbf{k}_0 = 0 & \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 = 1 \end{array}$$

$$R_{Z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{Z,0} = I_3, \quad R_{Z,\theta_1} R_{Z,\theta_2} = R_{Z,\theta_1+\theta_2}$$

$$R_{Z,\theta}^{-1} = R_{Z,-\theta}$$



Rotacje wokół osi układu współrzędnych

- ▶ wokół osi $\mathcal{X}$

$$R_{\mathcal{X},\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- ▶ wokół osi $\mathcal{Y}$

$$R_{\mathcal{Y},\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Złożenia 1

► złożenie translacji

$0x_0y_0z_0$	$\xRightarrow{\mathbf{d}_0^1}$	$0x_1y_1z_1$	$\xRightarrow{\mathbf{d}_1^2}$	$0x_2y_2z_2$
$\mathbf{p}_0$		$\mathbf{p}_1$		$\mathbf{p}_2$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^2 + \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{d}_1^2$$



Złożenia 2

- złożenie rotacji

$0x_0y_0z_0$	$\xRightarrow{R_0^1}$	$0x_1y_1z_1$	$\xRightarrow{R_1^2}$	$0x_2y_2z_2$
$\mathbf{p}_0$		$\mathbf{p}_1$		$\mathbf{p}_2$

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_0 = R_0^2 \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_1 = R_1^2 \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2$$

$R_0^2 = R_0^1 R_1^2$



Reprezentacje macierzy rotacji 1

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

Ograniczenia na kolumny macierzy R

$$\begin{aligned} \|R_1\| &= \|R_2\| = \|R_3\| = 1 \\ R_1 R_2 &= 0 \quad R_2 R_3 = 0 \quad R_1 R_3 = 0 \end{aligned}$$

9 zmiennych – 6 równań = 3 zmienne niezależne



Reprezentacje macierzy rotacji 2

- ▶ kąty Eulera ZYZ (ϕ , θ , ψ)

$$\begin{aligned} R_0^1 &= R_{Z,\phi} R_{Y,\theta} R_{Z,\psi} = \\ &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix} \\ &\quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad 0 \leq \theta < \pi \quad 0 \leq \psi < 2\pi \end{aligned}$$

- ▶ kąty Roll–Pitch–Yaw (ϕ , θ , ψ)

$$\begin{aligned} R_0^1 &= R_{Z,\phi} R_{Y,\theta} R_{X,\psi} \\ &\quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \psi < 2\pi \end{aligned}$$



Transformacje jednorodne

Definicja

Przekształcenie

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1$$

nazywamy ruchem ciała sztywnego, gdy macierz R jest ortogonalna.

Założmy, że mamy dwa ruchy

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1$$

$$\mathbf{p}_1 = R_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2$$

wówczas ich złożenie

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2 + R_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 = R_0^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_0^2$$

Porównując otrzymujemy

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2 \quad \mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{d}_1^2$$



Transformacje jednorodne 2

$$\begin{bmatrix} R_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^2 & \mathbf{d}_1^2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 R_1^2 & R_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Ruch ciała sztywnego może być reprezentowany przez transformację

$$T = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad R \in SO(3) \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

zwaną transformacją jednorodną. Po rozszerzeniu reprezentacji punktów $\mathbf{p}$ o dodatkową składową

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\boxed{\mathbf{P}_0 = T_0^1 \mathbf{P}_1}$$

$$T_0^1 \in SE(3)$$



Bazowe macierze jednorodne generujące $SE(3)$ (translacja)

$$Trans(x, a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans(y, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans(z, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Bazowe macierze jednorodne generujące $SE(3)$ (rotacja)

$$Rot(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & d_x \\ n_y & o_y & a_y & d_y \\ n_z & o_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

